高等学校数学における発展的学習の考察とその背景
～フィボナッチ数列の剰余の周期について～

Advanced materials for high school mathematics and their background
— periods of Fibonacci sequences modulo m —

2018 年 10 月 24 日受理

北山 秀隆
Hidetaka KITAYAMA
(和歌山大学教育学部)

松山 ともこ
Tomoko MATSUYAMA
(紀の川市教育委員会)

塩見 大輔
Daisuke SHIOMI
(山形大学理学部)

平成 30 年に公示された高等学校学習指導要領では,「数学的に考える資質・能力を育成する上で,数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を通して学習を展開すること」が特に重視されている。しかし，生徒の興味や能力に応じた適切なテーマを選ぶことは，教員にとっても難しいことであると思われる。そこで，本稿では，意欲的な高校生を想定し，そのような数学的活動の一例として，フィボナッチ数列に関するある問題を紹介し，規則の分からない未知の数学的事象をどのように観察して一般規則を数学的に表現するかというプロセスに焦点を当てて，数学的活動の実例を考察する。

1 はじめに

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ は

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

で定義され，具体的には，1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, $\cdots$ と続いていく数列である。フィボナッチ数列にはさまざまな面白い性質が潜んでいて，教材としての活用事例も多いが，フィボナッチ数列にはまだ活用されていない魅力的なテーマが膨大に有り，これらが教員や意欲的な生徒が利用可能な形で整理され，教育現場に提供されていくことが望ましい。本稿ではその一例として，フィボナッチ数列の剰余の周期についての問題を題材にとり，意欲的な高校生ならば実行可能な視点から数学的活動について記述する。

数研出版『数学 B』（平成 24 年検定済教科書）には，数列単元の最終ページに次のような発展内容が掲載されている。

> 『フィボナッチ数列に関する問題の中でも，次の問題は有名である。いまフィボナッチ数列の各項を，例えば 3 で割った余りで考えてみると
>
> $$1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0,\ \cdots$$
>
> となり,「1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0」という数列が繰り返される。これは 3 だけでなく，どんな 2 以上の整数 m で割った余りで考えても同様であり，必ずある長さの数列が繰り返される形になる。この繰り返される数列の最小の長さが何か，というのが問題である。例えば 3 で割った余りで考えた場合，この長さは 8 である。しかし，一般の m について，この長さを与える式があるかどうかは，いまだにわかっていない。フィボナッチ数列をめぐっては，この他にもさまざまな問題があり，多くの人々の興味をかき立てている。これらの問題の中には，上で述べた問題のように，現在でも解明されていないものもある。このように，フィボナッチ数列は多くの興味深い謎をはらんでいる。』

数学には，この問題のように，見かけは単純で高校生でも意味を理解できるのに実は未解決，という問題がいくつも有るが，その中でもこの問題の特徴は，いろいろ実験をしたり規則性を調べたり，生徒が自由に数学的活動に取り組めるという点である。例えば，有名なフェルマー予想（これは A. Wiles により解決されている）の場合，問題の意味としては高校生でも理解できるだろうが，それを題材にした数学的活動といっても，高校生にできることはあまり無く面白みが無い。一方，フィボナッチ数列の問題は，計算して表を作って調べたり，素数や素因数分解に着目して表をまとめ直して規則を考えたりと粘土をこねくり回すように自由な研究ができるのだ。これは，わくわくするような「学問としての数学」の楽しさを体験できる教材になる。実際，筆者の一人はいくつかの高等学校でこの問題についての授業を実施したが，事後の生徒の感想においては「身近なところ

に未解決問題があることがわかった。未解決問題は，問題の意味や使う数式が全然わからないものだと思っていたが，案外普通に分かる部分も多くて楽しかった。自分でも挑戦してみたい。」,「身の回りで起きる現象に対して興味・関心をもち，研究とまでいかなくても，自分なりにつきつめていけるようになりたいと思った。」,「フィボナッチ数列に関わる法則の奥深さに感動しました。」,「講義を聞いて数学は完成された学問でなく，まだまだ未知である理由が分かった気がしました。」といった回答が寄せられた。

本稿では，第 2 節で，フィボナッチ数列の剰余の作る周期について，問題の意味を詳しく説明し，第 3 節では，意欲的な高校生なら実行可能な視点から，周期の長さに潜む規則性について考察を進める。第 4 節では，規則性の証明や数学的背景をまとめる。

2　問題の内容

では，どんな問題なのか詳しく見ていこう。上記の通り，フィボナッチ数列とは，定義の隣接 3 項間漸化式によって，$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3, \cdots$ と定まっていく数列であった：

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ \cdots$$

この数列の各項を，3 で割った余りに置き換えて新たな数列を作ってみると

$$\underline{1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0},\ \underline{1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0},\ \underline{1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0},\ 1,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

となり，下線を引いた部分が周期的に繰り返されることになる。フィボナッチ数列は隣接する 2 項から漸化式によって定まっていくものであり，自然数 m で割った余りの列において隣接する 2 項の組み合わせは m^2 通りしかあり得ないので，どのような自然数 m で割った余りを考えてみても同様に周期的な数列が現れることになる。“1, 1” という並びが現れる部分で周期に入ることになるから，これを目印と考えれば分かりやすい。このように，どのような自然数 m で割った余りを考えても周期的になるが，周期の長さがいくつになるかは m によって異なる。少し試してみよう。なお，フィボナッチ数列の項はどんどん大きな数になるので，この計算をする際は，フィボナッチ数列の各項を求めてから m で割って余りを求めるのではなく，最初から余りのみに注目して，例えば $m = 3$ なら

$$1 + 1 = 2,\ 1 + 2 = 0,\ 2 + 0 = 2,\ 0 + 2 = 2,\ 2 + 2 = 1,\ 2 + 1 = 0,\ \cdots$$

というように求めていく方が計算しやすい。

$m = 2 : \underline{1,\ 1,\ 0},\ \underline{1,\ 1,\ 0},\ \underline{1,\ 1,\ 0},\ \cdots$

$m = 3 : \underline{1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0},\ 1,\ 1,\ 2,\ 0,\ \cdots$

$m = 4 : \underline{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0},\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0,\ \cdots$

$m = 5 : \underline{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 3,\ 3,\ 1,\ 4,\ 0,\ 4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 4,\ 1,\ 0},\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 3,\ \cdots$

ここで下線を引いた部分が周期の最小単位をなしている。この最小単位の長さのことを，m で割ったときの周期の長さと呼ぶことにし，それを $k(m)$ と表そう。つまり，今計算した例では

$$k(2) = 3,\ k(3) = 8,\ k(4) = 6,\ k(5) = 20$$

となる。たったこれだけの単純な話なのであるが，実はこの周期の長さ $k(m)$ を求める公式を人類はまだ知らないのである。しかし，一般には未解決問題とは言っても，この数値の並びを注意深く観察してみると，実は意外なほど多くの規則性が潜んでいる。どのような規則性があるかどうかを考え，それを数学的に表現し，説明する機会を作ることは生徒の数学的能力を養う適した数学的活動の一つであろう。

3　規則性の観察

高校生がこの問題に取り組んでいくにはどのような方向が可能であろうか。まず，もう少し大きなところまで $k(m)$ を計算して表を作ってみよう。最初にやり方やヒントを丁寧に説明してやれば，グループごとに分担するなどして，さほど時間をかけずに次の表を作成することができるであろう。

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k(m)$	3	8	6	20	24	16	12	24	60

この表から，$k(m)$ の数値についてどのようなことが言えるだろうか。数学の問題となると途端に思考が止まってしまう生徒も少なからずいるが，どんな些細な事でも何でも良いから言ってみるように促すと

(A) m が大きいから $k(m)$ も大きいというわけではない。増えたり減ったりする。
(B) ほとんどすべて $k(m)$ は偶数になっている。
(C) $k(m)$ は 4 の倍数が多い。

などが挙がってくる[1]。ヒントを出したりしつつ，$k(m)$ の数値の並びに何か規則があるかどうか更に問いかけてみると，数に対する感受性の高い生徒がいる場合は，

(D) $k(2)=3$，$k(2^2)=6$，$k(2^3)=12$ は等比数列になっている。
(E) $k(2)\times k(3)=k(6)$，$k(2)\times k(5)=k(10)$ になっている。

などが出てくることもある。さて (A)，(B), (C), (D), (E) の指摘は一般に成り立っているだろうか。まだ少ししか計算していないから断言するにはまだ早いと高校生でも思うだろう。数学の研究においては，少し計算してこのように仮説を立てた後，さらに計算をして検証し，精密化していくというステップが大切である。そこで，m を 200 までの範囲で計算して表を作ってみた。それが，最終頁の表 1 である。表 1 を見て，(A), (B), (C), (D), (E) を検証していこう。

3.1 (A), (B), (C) について

表 1 を見ると，$k(m)$ は増えたり減ったりの状況が続くことが分かるから，(A) は正しいと言える。また，m が 3 以上のときには確かに $k(m)$ の欄はすべて偶数になっており，(B) は正しいように見受けられる。もちろんこれは m が 200 以下に限った調査に過ぎないが，これだけ続くと偶然というわけではなさそうなので，これを予想として明記しておこう。

予想 1. $m>2$ のとき，$k(m)$ は必ず偶数であろう。

このように，計算によってある程度まで仮説を検証できたら，それを「予想」として数学的に表現して説明するという訓練は数学的活動としてとても大切である。一方で，(C) については一般には成立していないことが表 1 から分かる。例えば，$k(11)=10$ は 4 の倍数ではない。ただし，4 の倍数が多いというのも事実なので，その理由を考えてみるのも面白い。

3.2 (D) について

規則の分からない数表があるとき，素数に注目したり素因数分解したりすることは整数分野の数学的活動として鉄則中の鉄則と言って過言ではない。ここでは，m が 200 以下の表のうち，m が 2 べき，3 べき, 5 べきの場合を取り出して表にまとめ直してみると以下のようになる。

m	$k(m)$	m	$k(m)$
2	3	32	48
4	6	64	96
8	12	128	192
16	24		

m	$k(m)$
3	8
9	24
27	72
81	216

m	$k(m)$
5	20
25	100
125	500

この表を見せられると，容易に規則を言うことができる高校生は少なくないはずだ。等比数列というのが彼らにとって最も馴染みのある規則性の 1 つだからである。どんな素数 p に対しても，p べきの列は，p 倍 p 倍 $\cdots$ となっていることが予想できる。すなわち

予想 2. 素数 p に対して，$k(p), k(p^2), k(p^3)$, $\cdots$ は公比が p の等比数列になっているであろう。つまり，一般項は $k(p^n)=p^{n-1}k(p)$ であろう。

では，この等比数列の初項 $k(p)$ の公式を求められるであろうか。次にそれを調べてみよう。この場合も，まずは表を作るのが最初の一歩である。表 1 で m が素数のときのみを抜き出してみると以下のようになる。

[1]急に質問してもこちらの意図が分からず沈黙していまうので，テレビの IQ クイズのような遊びの数列クイズを授業の最初にいくつか出題しておいて，自由に考えられる雰囲気を作っておく必要がある。

p	$k(p)$	p	$k(p)$	p	$k(p)$	p	$k(p)$	p	$k(p)$
2	3	31	30	73	148	127	256	179	178
3	8	37	76	79	78	131	130	181	90
5	20	41	40	83	168	137	276	191	190
7	16	43	88	89	44	139	46	193	388
11	10	47	32	97	196	149	148	197	396
13	28	53	108	101	50	151	50	199	22
17	36	59	58	103	208	157	316		
19	18	61	60	107	72	163	328		
23	48	67	136	109	108	167	336		
29	14	71	70	113	76	173	348		

表をじっくり観察すると，$k(p) = p - 1$ となっている素数 p がいくつかあることに気付く。この関係式を満たすものだけを抜き出してみると以下のようになる。

p	$k(p)$	p	$k(p)$	p	$k(p)$
11	10	59	58	109	108
19	18	61	60	131	130
31	30	71	70	149	148
41	40	79	78	179	178
				191	190

驚いたことに，ここに出てくる素数は，一の位は 1 か 9 になっており，3 と 7 は出てきていないことが分かる。どうやらこれは偶然ではなさそうだ。どうも一の位が関係ありそうなので，先程の表を一の位ごとにまとめ直してみよう。

p	$k(p)$	p	$k(p)$	p	$k(p)$	p	$k(p)$
11	10	3	8	7	16	19	18
31	30	13	28	17	36	29	14
41	40	23	48	37	76	59	58
61	60	43	88	47	32	79	78
71	70	53	108	67	136	89	44
101	50	73	148	97	196	109	108
131	130	83	168	107	72	139	46
151	50	103	208	127	256	149	148
181	90	113	76	137	276	179	178
191	190	163	328	157	316	199	22
		173	348	167	336		
		193	197	197	396		

すると，素数 p の一の位が 1 だとしても $k(p) = p - 1$ が一般に成り立つわけではないことが分かる。例えば，$p = 101, 151, 181$ のときがそうだ。しかし，これらの場合も注意深く見てみると，

- $p = 101$ のとき $k(p) = (p-1)/2$
- $p = 151$ のとき $k(p) = (p-1)/3$
- $p = 181$ のとき $k(p) = (p-1)/2$

となっていて，$k(p)$ と $p-1$ とはやはり強い関係が有る。一の位が 9 の場合でやってみても同様になり，予想として次のように述べておくことにしよう。

予想 3. 素数 p の一の位が 1 または 9 のとき，$k(p)$ は必ず $p-1$ の約数であろう。

では，素数 p の一の位が 3 または 7 のときはどうなるか。

- $p=3$ のとき $k(p)=8$，$p=13$ のとき $k(p)=28$，$p=23$ のとき $k(p)=48$
- $p=7$ のとき $k(p)=16$，$p=17$ のとき $k(p)=36$，$p=37$ のとき $k(p)=76$

このあたりを見ていると，$k(p)=2(p+1)$ という関係に気付くのではないか。$p=113$ のとき $k(p)=76$ などの例もあって一瞬困るが，76 は 228 の約数になっているので，上の予想と同じ調子で次の予想も見えてくる。

予想 4. 素数 p の一の位が 3 または 7 のとき，$k(p)$ は $2(p+1)$ の約数であろう。

3.3　(E) について

(E) というのは

$$k(2)\times k(3)=3\times 8=24=k(6),\quad k(2)\times k(5)=3\times 20=60=k(10)$$

という関係に注目して

$$k(a)\times k(b)=k(a\times b)$$

という規則が有るのではないかという仮説であった。確かに表 1 を見ても

$$k(2)\times k(7)=3\times 16=48=k(14)$$

なども成り立っているので偶然とは思えないが，一方で

$$k(2)\times k(4)=3\times 6=\underline{18},\quad k(8)=\underline{12}$$

$$k(3)\times k(5)=8\times 20=\underline{160},\quad k(15)=\underline{40}$$

$$k(4)\times k(5)=6\times 20=\underline{120},\quad k(20)=\underline{60}$$

など当てはまらない例はいくらでも有りそうだ。果たしてこれはどういう規則なのだろうか。先程も述べたように，困ったときは素数に着目するのが鉄則であることを思い出そう。素数 p, q に対して，$k(p)$，$k(q)$ と $k(pq)$ をいくつか整理してみると以下のようになる。

$k(2)=\underline{3},\ k(3)=\underline{8}$	$\rightarrow$	$k(6)=\underline{24}$	$k(3)=\underline{8},\ k(5)=\underline{20}$	$\rightarrow$	$k(15)=\underline{40}$
$k(2)=\underline{3},\ k(5)=\underline{20}$	$\rightarrow$	$k(10)=\underline{60}$	$k(3)=\underline{8},\ k(7)=\underline{16}$	$\rightarrow$	$k(21)=\underline{16}$
$k(2)=\underline{3},\ k(7)=\underline{16}$	$\rightarrow$	$k(14)=\underline{48}$	$k(3)=\underline{8},\ k(11)=\underline{10}$	$\rightarrow$	$k(33)=\underline{40}$
$k(2)=\underline{3},\ k(11)=\underline{10}$	$\rightarrow$	$k(22)=\underline{30}$	$k(5)=\underline{20},\ k(7)=\underline{16}$	$\rightarrow$	$k(35)=\underline{80}$
$k(2)=\underline{3},\ k(13)=\underline{28}$	$\rightarrow$	$k(26)=\underline{84}$	$k(5)=\underline{20},\ k(11)=\underline{10}$	$\rightarrow$	$k(55)=\underline{20}$
$k(2)=\underline{3},\ k(17)=\underline{36}$	$\rightarrow$	$k(34)=\underline{36}$	$k(5)=\underline{20},\ k(13)=\underline{28}$	$\rightarrow$	$k(65)=\underline{140}$

この関係を時間をかけてじっくり観察して欲しい。すると，勘の鋭い高校生ならば割とすぐに，最小公倍数というキーワードに思い当たるではないか。表 1 を使って更にいくつか試してみると，確かに成り立っていることが確認できる。

予想 5. 素数 p, q について，$k(pq)$ は $k(p)$ と $k(q)$ の最小公倍数になるであろう。

3.4　その他

今までの部分でもそうだが，自然数 m を入力したとき周期の長さ $k(m)$ を出力するプログラムが有れば，生徒たちはコンピュータを使って，もっと自由にいろいろな仮説を立てて自分で検証したりできるようになる。プログラミングの課題として生徒たちが自作できればより良いが，無理な場合は教師が用意してやると良い。

例えば，表 1 を見ていて，$k(24)=24$，$k(120)=120$ ということに気付いたとしよう。$k(m)=m$ という性質を満たすものは 200 までの間にはこの 2 つしか無いが，他には無いのだろうか。ここでプログラムの出番である。m を例えば 10000 まで走らせて，$k(m)=m$ を満たすものを自動的に探させると

$$m=24,\ 120,\ 600,\ 3000$$

という出力が得られる。この並びを見れば，たいていの高校生なら，公比 5 の等比数列であることを見破るであろう。

予想 6. $k(m)=m$ を満たす自然数 m は，初項 24，公比 5 の等比数列になっているであろう。

他にも，$k(m)=2m$ になる m はどんな並びで出現するか，など実験できる課題はいくらでも見つけられる。

4　数学的背景

この節では，フィボナッチ数列の剰余による周期の問題について，これまで述べてきた予想の定理としての証明や数学的背景を述べる。主要な文献は Wall による [5] である。他に日本語で読める解説も有るので，証明は本稿では省略し文献をあげるにとどめる。ただし，予想 6 については，日本語で読める文献は著者の知る限り存在せず，[2, Theorem 3.6] の証明では一般には入手しにくい他の文献を参照せねばならず読みにくいと思われるので，著者による証明を記述しておく。

まず，予想 1 は次のように一般に成り立つ定理である。

定理 1. $m > 2$ のとき， $k(m)$ は必ず偶数であろう。

Proof. [5, Theorem 4], [4, 定理 20 (a)]. □

自然数 m に対して周期の長さ $k(m)$ を求めたいのであるが，実は次の定理が成り立つ。これは予想 5 を更に一般に証明した定理である。

定理 2. m の素因数分解を $m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ とするとき，$k(m) = \mathrm{lcm}\{k(p_1^{e_1}), \ldots, k(p_r^{e_r})\}$ である。ここで，lcm は最小公倍数を表す。

Proof. [5, Theorem 5], [4, 定理 21 (b)]. □

定理 2 により，自然数 m に対して $k(m)$ を求める問題は，素数 p と自然数 n に対して $k(p^n)$ を求めることに帰着された。そこで，予想 2 が重要になるが，予想 2 が一般に正しいかどうかは実はまだ未解決問題で，人類はまだ答えを知らない。ここで Wall 予想と呼ばれる有名な未解決問題が関わってくる。Wall は [5] でこの問題を考察し，次の定理を証明した。まず，明らかに $k(p) \leqq k(p^2) \leqq k(p^3) \leqq \cdots$ であることに注意しよう。

定理 3. $k(p^t) = k(p)$ をみたす最大の自然数を t とする。 このとき，$n \geqq t$ なる任意の自然数 n に対して，$k(p^n) = p^{n-t} \cdot k(p)$ が成り立つ。

Proof. [5, Theorem5], [4, 定理 21(b)]. □

この定理により，$k(p^2) \neq k(p)$ なる素数 p に対しては，$k(p^n) = p^{n-1} \cdot k(p)$ がすべての自然数 n に対して成り立つことになり，つまり，予想 2 は正しいということになる。Wall は 1960 年の論文 [5] の段階で，$k(p^2) = k(p)$ となる素数 p は $p < 10000$ の範囲では見つかっていないと述べている。現在は，この条件 $k(p) \neq k(p^2)$ はすべての素数 p に対して成り立つと思われているが，それは Wall 予想と呼ばれている未解決問題である。

予想 7 (Wall [5], 1960)**.** すべての素数 p に対して，$k(p) \neq k(p^2)$ が成り立つであろう。

Wall によってこの予想が提唱されてから 60 年近く経つが，今も真偽不明の未解決問題である。[3] によると，現在のところ，PrimeGrid プロジェクトにより，$p < 1.9 \times 10^{17}$ を満たす素数に対しては正しいことが確認されている。

もしこの Wall 予想がすべての素数 p に対して成り立つならば，定理 3 より，$k(p^n) = p^{n-1}k(p)$ が成り立つので，結局 $k(p^n)$ を求める問題は，素数 p に対する $k(p)$ を求める問題に帰着されることになる。しかし，$k(p)$ に関しても未解決問題で，結論は知られていない。予想 3 と予想 4 については，一般に成立することが証明されている。

定理 4.
(1)　素数 p が $p = 10x \pm 1$ の形のとき，$k(p)$ は $p - 1$ の約数である。
(2)　素数 p が $p = 10x \pm 3$ の形のとき，$k(p)$ は $2(p + 1)$ の約数である。

Proof. [5, Theorem 6, 7], [4, 定理 23], [1, 定理 4.52]. □

最後に，予想 6 についての定理 6 とその証明を述べる。まず，次の補題を証明する。

補題 5. p が 2 でない素数であるとき，任意の自然数 n に対して $k(p^n)$ の素因子は p 以下である。

Proof. $p \neq 5$ のとき，定理 4 より，$k(p)$ は $p - 1$ または $2(p + 1)$ の約数である。定理 3 より，$k(p^n)$ は有る自然数 t に対して $k(p^n) = p^{n-t}k(p)$ と書けるので，$k(p^n)$ の素因子 l は，$l = p$ かまたは，$p - 1$ か $2(p + 1)$ の約数である。$l \neq 2$ のときは, $l = p$ かまたは，$p - 1$ か $\frac{p+1}{2}$ の約数ということになり，どの場合も $l \leq p$ となる。 $l = 2$ のときは，明らかに $l < p$. また，$p = 5$ のときは，$k(5^t) = 5^{t-1}k(s) = 5^t \cdot 4$ であるので，$k(5^t)$ の素因子 l は $l \leq p$ を満たす。 □

では，補題 5 を用いて，予想 6 の証明を完了しよう。

定理 6. $k(n) = n$ となるための必要十分条件は，$n = 24 \cdot 5^a$ を満たす非負整数 a が存在することである。

Proof.
$\Leftarrow$ を示す　$n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^a$ とする。$a = 0$ のとき，$n = 24$ であり $k(24) = 24$ として成立する。$a \geqq 1$ のときは，定理 2, 3 より

$$k(n) = \mathrm{lcm}\{k(2^3), k(3), k(5^a)\} = \mathrm{lcm}\{2^2 \cdot 3, 8, 5^{a-1}20\} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^a = n.$$

$\Rightarrow$ を示す　$k(n) = n$ とする。

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \prod_{i=1}^{s} p_i^{e_i} \quad (5 < p_1 < p_2 < \cdots < p_s,\ e_s > 0)$$

とすると，定理 2 より

$$n = k(n) = \mathrm{lcm}\{k(2^a), k(3^b), k(5^c), k(p_1^{e_1}), \ldots, k(p_s^{e_s})\}$$

であるから，n は $k(2^a)k(3^b)k(5^c)\prod_{i=1}^{s} k(p_i^{e_i})$ の約数である。ここで，補題 5 より，n の素因子のうち p_s は $k(p_s)^{e_s}$ からしか出てこないので，$k(p_s^{e_s})$ は $p_s^{e_s}$ で割り切れる。一方，定理 3 より，$k(p_s^{e_s})$ はある自然数 t に対して $k(p_s^{e_s}) = p_s^{e_s - t}k(p_s)$ であるので，$k(p_s)$ は p_s で割り切れなければならない。ここで，$p_s \neq 2, 5$ であるので，$k(p_s)$ は $p_s - 1$ または $2(p_s + 1)$ の約数であるという定理 4 に矛盾する。以上で，$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ でなければならないことが分かった。

(i) $a = b = 0$ のとき，$c \geq 1$, $n = 5^c$ であり $k(n) = 4 \cdot 5^c \neq n$.

(ii) $a \geq 1$ かつ $b = 0$ のとき，$3 \nmid n$ であるが，一方 $k(2^a) = 3 \cdot 2^{a-1}$ より $3 \mid k(n)$ であるので，$k(n) \neq n$.

(iii) $a = 0$ かつ $b \geq 1$ のとき，$2 \nmid n$ であるが，一方 $k(3^b) = 8 \cdot 3^{b-1}$ より $2 \mid k(n)$ であるので，$k(n) \neq n$.

以上により，$a \geq 1$ かつ $b \geq 1$ でなければならない。このとき

$$\begin{aligned} k(n) &= \begin{cases} \mathrm{lcm}\{k(2^a), k(3^b), k(5^c)\} & \text{if } c \geq 1 \\ \mathrm{lcm}\{k(2^a), k(3^b)\} & \text{if } c = 0 \end{cases} \\ &= 2^d \cdot 3^e \cdot 5^c. \end{aligned}$$

ここで，$k(2^a) = 2^{a-1} \cdot 3$, $k(3^b) = 2^3 \cdot 3^{b-1}$, $k(5^c) = 2^2 \cdot 5^c$ より $d = \max\{a-1, 3\}$, $e = \max\{1, b-1\}$ である。今，$k(n) = n = 2^a 3^b 5^c$ であるので，$a = d$, $b = e$ であり，$d = 3$, $e = 1$ でなければならない。従って $n = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^c$ である。 □

参考文献

[1] 青木昇, 素数と２次体の整数論, 共立出版, 2012.

[2] C. Guo, A. Koch, *Bounds for Fibonacci period growth*, Involve **2** (2009), no. 2, 195–210.

[3] J. Klaška, *Donald Dines Wall's conjecture*, Fibonacci Quart. **56** (2018), no. 1, 43–51.

[4] 中村滋, フィボナッチ数の小宇宙, 日本評論社, 2008.

[5] D. D. Wall, *Fibonacci Series modulo m*, Amer. Math. Monthly **67** (1960), 525–532.

表 1: $m \leq 200$ の周期の長さ

m	$k(m)$	m	$k(m)$	m	$k(m)$	m	$k(m)$	m	$k(m)$
1		41	40	81	216	121	110	161	48
2	3	42	48	82	120	122	60	162	216
3	8	43	88	83	168	123	40	163	328
4	6	44	30	84	48	124	30	164	120
5	20	45	120	85	180	125	500	165	40
6	24	46	48	86	264	126	48	166	168
7	16	47	32	87	56	127	256	167	336
8	12	48	24	88	60	128	192	168	48
9	24	49	112	89	44	129	88	169	364
10	60	50	300	90	120	130	420	170	180
11	10	51	72	91	112	131	130	171	72
12	24	52	84	92	48	132	120	172	264
13	28	53	108	93	120	133	144	173	348
14	48	54	72	94	96	134	408	174	168
15	40	55	20	95	180	135	360	175	400
16	24	56	48	96	48	136	36	176	120
17	36	57	72	97	196	137	276	177	232
18	24	58	42	98	336	138	48	178	132
19	18	59	58	99	120	139	46	179	178
20	60	60	120	100	300	140	240	180	120
21	16	61	60	101	50	141	32	181	90
22	30	62	30	102	72	142	210	182	336
23	48	63	48	103	208	143	140	183	120
24	24	64	96	104	84	144	24	184	48
25	100	65	140	105	80	145	140	185	380
26	84	66	120	106	108	146	444	186	120
27	72	67	136	107	72	147	112	187	180
28	48	68	36	108	72	148	228	188	96
29	14	69	48	109	108	149	148	189	144
30	120	70	240	110	60	150	600	190	180
31	30	71	70	111	152	151	50	191	190
32	48	72	24	112	48	152	36	192	96
33	40	73	148	113	76	153	72	193	388
34	36	74	228	114	72	154	240	194	588
35	80	75	200	115	240	155	60	195	280
36	24	76	18	116	42	156	168	196	336
37	76	77	80	117	168	157	316	197	396
38	18	78	168	118	174	158	78	198	120
39	56	79	78	119	144	159	216	199	22
40	60	80	120	120	120	160	240	200	300